

# Superposicion y adelgazamiento del proceso Poisson

Teoremas, demostraciones y aplicaciones a finanzas

Damian Gallardo   Alejandro Castillo   Tonatiuh Gutierrez

Prof. Simón Luna Gómez

Procesos Estocasticos I, ITAM, Primavera 2026

## 1 Introduccion

El proceso Poisson modela sucesiones de eventos puntuales que ocurren al azar en el tiempo, con tiempos entre llegadas independientes y exponencialmente distribuidos. Esta simplicidad lo vuelve una herramienta omnipresente en aplicaciones que van desde la teoria de colas hasta la microestructura de mercados.

Dos resultados estructurales explican gran parte de su utilidad. La *superposicion* dice que la suma de procesos Poisson independientes vuelve a ser Poisson, con tasa igual a la suma de las tasas. El *adelgazamiento* dice lo contrario: si tomamos un proceso Poisson y clasificamos cada llegada al azar como tipo 1 o tipo 2, lo que obtenemos son dos procesos Poisson independientes entre si. La parte interesante no es la primera afirmacion sino la segunda, en particular la independencia entre los sub-procesos resultantes a pesar de provenir del mismo proceso fuente.

En este reporte presentamos ambos teoremas con sus demostraciones (Secciones 2 a 4), discutimos la dualidad entre ellos (Seccion 5), y los aplicamos a dos contextos financieros: el flujo de ordenes en un libro de ordenes y la descomposicion de saltos en el modelo de Merton (Seccion 6).

## 2 El proceso Poisson

**Definicion 1** (Proceso Poisson). Una sucesion de llegadas en tiempo continuo  $\{N_t, t > 0\}$  es un *proceso Poisson* con parametro  $\lambda > 0$  si:

- (a) El numero de llegadas en un intervalo de longitud  $t$  se distribuye  $\text{Poi}(\lambda t)$ .
- (b) El numero de llegadas en intervalos disjuntos son independientes.

La convencion es que el tiempo inicie en  $t = 0$ , en cuyo caso el proceso ocurre en  $(0, \infty)$ .

Una caracterizacion equivalente y mas operativa para simular el proceso es la siguiente: si denotamos por  $T_1, T_2, \dots$  los tiempos entre llegadas consecutivas, entonces

$$T_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Exp}(\lambda), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La equivalencia entre ambas caracterizaciones esta demostrada en [1]. Para nuestras simulaciones esta sera la version mas util porque generar exponenciales independientes y acumularlas produce directamente las llegadas del proceso.

*Observacion 1* (MGF de la Poisson). Para  $X \sim \text{Poi}(\mu)$ , la funcion generadora de momentos esta dada por  $M_X(\theta) = e^{\mu(e^\theta - 1)}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ . Esta expresion compacta sera el ingrediente clave en la demostracion del teorema de superposicion.

## 3 Superposicion

Empezamos con el resultado mas intuitivo de los dos. Si tenemos dos fuentes independientes que producen eventos segun procesos Poisson con tasas  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , y observamos su flujo combinado, lo que vemos es nuevamente un proceso Poisson, esta vez con tasa  $\lambda_1 + \lambda_2$ .

**Teorema 1** (Superposicion). Sean  $\{N_t^1, t > 0\}$  y  $\{N_t^2, t > 0\}$  procesos Poisson independientes con parametros  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , respectivamente. El proceso combinado

$$\{N_t = N_t^1 + N_t^2, t > 0\}$$

es un proceso Poisson con parametro  $\lambda_1 + \lambda_2$ .

*Proof.* Procedemos por funciones generadoras de momentos. Para  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$M_{N_t}(\theta) = \mathbb{E}[e^{\theta N_t}] = \mathbb{E}[e^{\theta(N_t^1 + N_t^2)}] = \mathbb{E}[e^{\theta N_t^1} e^{\theta N_t^2}].$$

La independencia entre  $N_t^1$  y  $N_t^2$  permite factorizar la esperanza del producto:

$$M_{N_t}(\theta) = M_{N_t^1}(\theta) \cdot M_{N_t^2}(\theta).$$

Por hipotesis  $N_t^i \sim \text{Poi}(\lambda_i t)$ , asi que sustituyendo las MGF correspondientes,

$$M_{N_t}(\theta) = e^{\lambda_1 t(e^\theta - 1)} \cdot e^{\lambda_2 t(e^\theta - 1)} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t(e^\theta - 1)}.$$

Esta es precisamente la MGF de una variable  $\text{Poi}((\lambda_1 + \lambda_2)t)$ , y por unicidad concluimos que  $N_t \sim \text{Poi}((\lambda_1 + \lambda_2)t)$ . La independencia de los incrementos en intervalos disjuntos se hereda directamente de la independencia de los incrementos de cada  $N_t^i$  por separado.  $\square$

## 4 Adelgazamiento

Una pregunta natural sobre el proceso combinado: cuando observamos un evento, ¿con que probabilidad proviene de la fuente 1 en lugar de la fuente 2? Un calculo directo con exponenciales muestra que esta probabilidad es  $p = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$ , y que cada evento es de tipo 1 con esa misma probabilidad de manera independiente. Esta observacion da pie a la operacion inversa de la superposicion: tomar un proceso Poisson, clasificar cada llegada al azar, y obtener dos sub-procesos. El resultado es sorprendente, porque a pesar de provenir del mismo proceso fuente los sub-procesos terminan siendo independientes entre si.

**Teorema 2** (Adelgazamiento). Sea  $\{N_t, t > 0\}$  un proceso Poisson con parametro  $\lambda$ . Supongamos que cada llegada se clasifica como tipo 1 con probabilidad  $p$  o tipo 2 con probabilidad  $1 - p$ , de manera independiente entre llegadas y del proceso mismo. Sean  $N_t^1$  y  $N_t^2$  los conteos de cada tipo. Entonces:

- (i)  $\{N_t^1\}$  es un proceso Poisson con parametro  $\lambda p$ ;
- (ii)  $\{N_t^2\}$  es un proceso Poisson con parametro  $\lambda(1 - p)$ ;
- (iii)  $\{N_t^1\}$  y  $\{N_t^2\}$  son procesos independientes.

*Proof.* Calculamos la distribucion conjunta de  $(N_t^1, N_t^2)$  y de ahi deducimos los marginales y la independencia simultaneamente. Condicionando en  $N_t = j + k$ ,

$$\mathbb{P}(N_t^1 = j, N_t^2 = k) = \mathbb{P}(N_t^1 = j, N_t^2 = k \mid N_t = j + k) \cdot \mathbb{P}(N_t = j + k).$$

Dado que ocurrieron  $j + k$  eventos en total, el numero que se clasifica como tipo 1 es  $\text{Bin}(j + k, p)$ , ya que cada evento se clasifica independientemente con probabilidad  $p$ :

$$\mathbb{P}(N_t^1 = j, N_t^2 = k \mid N_t = j + k) = \binom{j + k}{j} p^j (1 - p)^k.$$

El segundo factor es el conteo Poisson,  $\mathbb{P}(N_t = j + k) = e^{-\lambda t} (\lambda t)^{j+k} / (j + k)!$ . Sustituyendo y simplificando  $(j + k)!$  entre numerador y denominador,

$$\mathbb{P}(N_t^1 = j, N_t^2 = k) = \frac{p^j (1 - p)^k (\lambda t)^{j+k}}{j! k!} e^{-\lambda t}.$$

Reescribiendo  $e^{-\lambda t} = e^{-\lambda p t} \cdot e^{-\lambda(1-p)t}$  y agrupando potencias por tipo,

$$\mathbb{P}(N_t^1 = j, N_t^2 = k) = \underbrace{\frac{(\lambda p t)^j}{j!} e^{-\lambda p t}}_{\text{Poi}(\lambda p t)} \cdot \underbrace{\frac{(\lambda(1-p)t)^k}{k!} e^{-\lambda(1-p)t}}_{\text{Poi}(\lambda(1-p)t)}.$$

La conjunta se factoriza como producto de dos Poisson, lo que identifica los marginales y demuestra la independencia en un solo paso.  $\square$

## 5 Dualidad

Los Teoremas 1 y 2 son operaciones inversas la una de la otra:

$$\text{Superposicion: } \text{Poi}(\lambda_1) \perp\!\!\!\perp \text{Poi}(\lambda_2) \longrightarrow \text{Poi}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$\text{Adelgazamiento: } \text{Poi}(\lambda) \xrightarrow{p} \text{Poi}(\lambda p) \perp\!\!\!\perp \text{Poi}(\lambda(1-p))$$

La superposicion fusiona flujos independientes en uno solo. El adelgazamiento parte un flujo unico en dos sub-flujos independientes. En ambos casos la propiedad Poisson se preserva, lo que las vuelve operaciones especialmente naturales y explica por que aparecen tan seguido en aplicaciones.

## 6 Aplicaciones a finanzas

### 6.1 Microestructura: flujo de ordenes

Un caso clasico es el modelado del flujo de ordenes en un libro de ordenes. Las ordenes de compra (*bids*) y de venta (*asks*) llegan al libro como dos procesos Poisson independientes con parametros  $\lambda_{\text{bid}}$  y  $\lambda_{\text{ask}}$  respectivamente [4]. Por superposicion (Teorema 1), el flujo total es

$$N_{\text{total}}(t) = N_{\text{bid}}(t) + N_{\text{ask}}(t) \sim \text{Poi}((\lambda_{\text{bid}} + \lambda_{\text{ask}})t).$$

Reciprocamente, conocido el flujo total, por adelgazamiento (Teorema 2) con probabilidad  $p = \lambda_{\text{bid}}/(\lambda_{\text{bid}} + \lambda_{\text{ask}})$  recuperamos los flujos individuales como procesos Poisson independientes.

Una cantidad construida directamente a partir de estos sub-procesos es el *order imbalance*:

$$\text{OI}(t) = \frac{N_{\text{bid}}(t) - N_{\text{ask}}(t)}{N_{\text{bid}}(t) + N_{\text{ask}}(t)},$$

que mide en tiempo real la presion relativa entre compradores y vendedores. Es un predictor clasico del movimiento de precios en alta frecuencia.

### 6.2 Modelo de Merton: descomposicion de saltos

Una aplicacion menos obvia, pero quizas mas elegante, aparece en el modelo de Merton [3], que extiende Black y Scholes incorporando saltos discretos en la dinamica del precio:

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = (\mu - \lambda \bar{k}) dt + \sigma dW_t + dJ_t,$$

donde  $J_t = \sum_{i=1}^{N_t} (Y_i - 1)$  es el componente de saltos,  $N_t \sim \text{Poi}(\lambda)$  cuenta los saltos,  $\ln Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_J, \sigma_J^2)$  son los tamaños relativos, y  $\bar{k} = e^{\mu_J + \sigma_J^2/2} - 1$  es el compensador.

Una pregunta natural es separar los saltos alcistas de los bajistas. Esto se logra clasificando cada salto segun su signo. Si  $p = \mathbb{P}(\ln Y_i > 0) = \Phi(\mu_J/\sigma_J)$ , donde  $\Phi$  es la distribucion acumulada normal estandar, entonces por el Teorema 2 obtenemos los sub-procesos

$$N^+(t) \sim \text{Poi}(\lambda p), \quad N^-(t) \sim \text{Poi}(\lambda(1-p)),$$

que cuentan respectivamente los saltos positivos y negativos en  $(0, t]$ , y son procesos Poisson *independientes*. Esta descomposicion permite analizar separadamente el riesgo direccional asociado a cada tipo de salto y es util para la calibracion de modelos de riesgo y la valuacion de opciones [5].

## References

- [1] Ross, S. M. (2014). *Introduction to Probability Models*, 11.<sup>a</sup> ed. Academic Press. Capitulo 5.
- [2] Kingman, J. F. C. (1993). *Poisson Processes*. Oxford University Press.
- [3] Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2), 125-144.
- [4] Cont, R. (2011). Statistical modeling of high-frequency financial data. *IEEE Signal Processing Magazine*, 28(5), 16-25.
- [5] Cont, R., y Tankov, P. (2003). *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman & Hall/CRC.